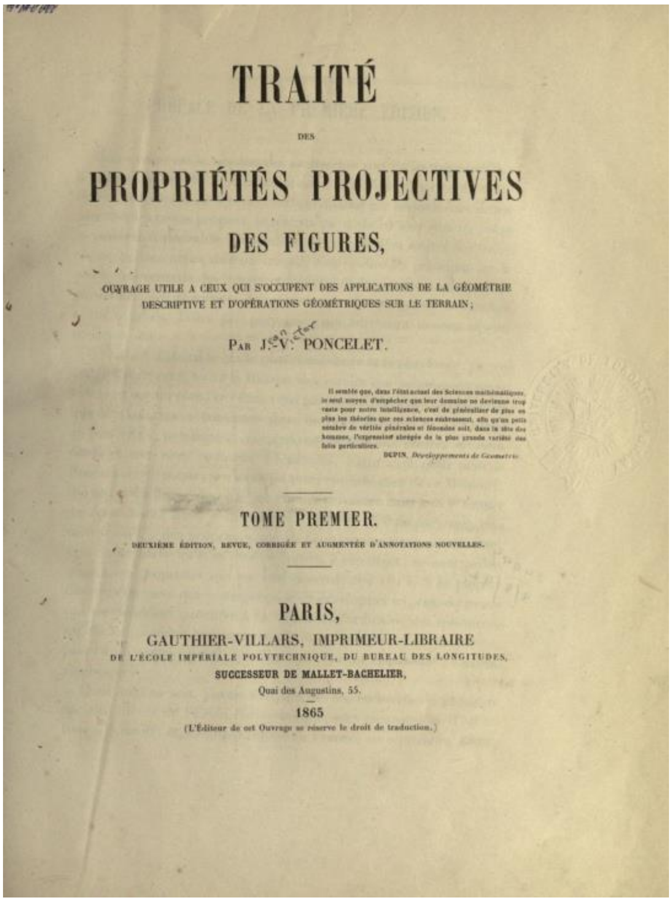
PONCELET (Jean Victor) - 1/7/1788 - 22/12/1867.

Frequentò l'École Polytechnique di Parigi e l’Accademia militare di Metz, dalla quale uscì ufficiale. Fatto prigioniero dai Russi nel novembre 1812, durante la disastrosa ritirata di Napoleone da Mosca, fu internato a Saratoff, e ritornò in patria soltanto nel settembre 1814, portando con sé, in sette quaderni manoscritti, i risultati delle ricerche matematiche da lui intraprese durante la prigionia "privo - come egli dice - di ogni specie di libri e di aiuto, e distratto dalle disgrazie proprie e della patria".

Dopo il ritorno in patria, riprese a servire il proprio Paese, accettando vari incarichi. Tra questi ricordiamo: l'insegnamento della Meccanica nella scuola di applicazione di artiglieria e genio, l'insegnamento alla Facoltà di Scienze di Parigi, il comando della École Polytechnique, la riforma degli studi e dei programmi della stessa scuola, la presidenza della sezione di Macchine utensili nelle esposizioni di Parigi e Londra. Tenne anche vari incarichi pubblici, tra cui quello di membro del consiglio municipale di Metz e di membro dell'Assemblea costituente nel periodo dal 1848 al 1851. Fu incaricato anche di viaggi di ispezione, e della stesura delle relative relazioni, delle industrie del ferro e del lino, della lana e della seta. Nel 1831 rifiutò il seggio dell'Académie des Sciences che era stato di Laplace, per ragioni politiche. Ma accettò tre anni più tardi di far parte dell'Accademia.

Nelle sue opere troviamo trattati argomenti di Meccanica soprattutto applicata, con varie memorie sulla pressione nei cilindri delle macchine a vapore, sui sistemi di chiuse a galleggianti, sull'equilibrio delle volte, sulla rotazione del piano di oscillazione del pendolo, sull’afflusso dell’aria dai tubi. Su questi argomenti egli scrisse anche dei trattati, come il volume "Introduction à la Mécanique industrielle (la seconda edizione è del 1851 - Metz) e i due volumi del "Traité de la Mécanique appliquée aux machines " (Liegi, 1856). Ma la sua fama è affidata soprattutto alle opere di Matematica pura, alla quale egli si sente portato da una vocazione prepotente, che gli fa rimpiangere i molti impegni i quali gli impediscono di dedicarsi interamente alla scienza che predilige.


TRAITÉ
DES
PROPRIÉTÉS PROJECTIVES
DES FIGURES,
OUVRAGE UTILE A CEUX QUI S'OCCUPENT DES APPLICATIONS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET D'OPÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES SUR LE TERRAIN;
PAR J.-V. PONCELET.

Il semble que, dans l'état actuel des Sciences mathématiques, le seul moyen d'empêcher que leur domaine ne devienne trop vaste pour notre intelligence, c'est de généraliser de plus en plus les théories que ces sciences embrassent, afin qu'un petit nombre de vérités générales et fécondes soit, dans la tête des hommes, l'expression abrégée de la plus grande variété des faits particuliers.
DUPIN, *Développements de Géométrie.*

TOME PREMIER.
DEUXIÈME ÉDITION, REVUE, CORRIGÉE ET AUGMENTÉE D'ANNOTATIONS NOUVELLES.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.
1865
(L'Éditeur de cet Ouvrage se réserve le droit de traduction.)

Oltre a varie memorie di Geometria e di Analisi matematica (sulla teoria delle serie), ricordiamo che i risultati delle sue meditazioni di prigionia apparvero raccolti in volume sotto il titolo "Applications d'Analyse et de Géométrie" nel 1862, e in seconda edizione nel 1864. La sua opera principale, il "Traité des propriétés projectives des figures", comparve in prima edizione nel 1822·ed in seconda edizione, con ampliamenti, complementi e discussioni varie, nel 1864. L’opera geometrica di Poncelet gli dà un posto fondamentale tra gli iniziatori della branca della Geometria che viene chiamata "Geometria proiettiva". Nel gettare le basi di questa dottrina egli dimostra tutta la vastità della sua intuizione, la fecondità della sua fantasia creatrice, la attività della sua inventiva. È da presumere che le circostanze disgraziate nelle quali maturò la sua vocazione di matematico, privandolo di ogni riferimento bibliografico e costringendolo a servirsi soltanto di ciò che ricordava delle opere del Monge e del Carnot, abbiano favorito il fiorire delle sue doti di creatore di nuove dottrine geometriche. Nelle suo opere, e soprattutto nel "Traité", egli dichiara ripetutamente che non è tanto sua intenzione quella di presentare dei nuovi risultati di Geometria quanto quella di presentare un nuovo metodo, un incentivo alla creazione ed alla scoperta di nuove dimostrazioni delle proposizioni matematiche già note e di invenzioni nuove.

I nuovi metodi di invenzione, di scoperta e di dimostrazione che egli propone sono fondati su certi capisaldi che sono: il "Principio di continuità", la ricerca delle "proprietà proiettive" e l'uso sistematico del "metodo delle trasversali" e della trasformazione per polari reciproche. Per quanto riguarda il "Principio di continuità" il P. così si esprime in una lettera del 1818: "*Se si pensa che una data figura venga a cambiare di situazione per un movimento progressivo e continuo delle parti che la compongono, senza tuttavia violare il legame e la dipendenza inizialmente stabiliti fra di esse, le relazioni e le proprietà metriche concernenti la figura nella situazione primitiva restano applicabili, nella loro forma generale, a tutte le figure che se ne derivano, senz'altro cambiamento che quello delle denominazioni semplici 'più' o 'meno' che possono cambiarsi tra di loro in queste relazioni. Quanto alle relazioni puramente grafiche o descrittive che concernono la figura primitiva, esse restano applicabili a tutte le figure derivate senz'altre modificazioni che quelle sopravvenute nella situazione rispettiva delle linee*."

Dalla lettura di questa pagina si potrebbe trarre l'opinione che il "Principio di continuità" fosse considerato dal P. come un puro strumento di generalizzazione delle relazioni esistenti tra enti geometrici nel campo reale, a prescindere dai segni delle grandezze poste in gioco. Ma il programma di P. era ben più ambizioso perché, sulla scorta di idee di alcuni matematici contemporanei, mirava a sostituire l'uso dell'Algebra in Geometria mediante le convenzioni della Geometria analitica ed a stabilire un metodo geometrico che avesse la stessa potenza degli algoritmi dell'Algebra. (*)

In questo ordine di idee P. si pose un problema che sarà risolto anche da K. K. von Staudt nella sua "Geometrie der Lage, (1847)"; [Beiträge zur Geometrie der Lage (1856-57-60); traduzione italiana di M. Pieri, Torino, Bocca, 1889]. Il problema consiste nello stabilire delle convenzioni per rappresentare le coppie di enti geometrici (punti e rette del piano per esempio) che hanno coordinate complesso-coniugate mediante enti reali, che li sostituiscano agli effetti delle costruzioni geometriche e della costruzione di figure geometriche determinate da quegli elementi.

Per comprendere meglio quanto stiamo per dire, prendiamo in considerazione il seguente esempio, tratto dalla Geometria elementare: *Sia data una circonferenza k e nel suo piano un punto P. Si considerino le corde di k che passano per P e si cerchi il luogo dei punti medi delle corde stesse*. La trattazione del problema per via elementare conduce ad introdurre le distinzioni tra vari casi e sottocasi. Anzitutto se P è interno alla circonferenza k e coincide con il suo centro, il luogo è formato dall'unico punto P. Se poi P è interno alla circonferenza k oppure appartiene ad essa, ma non coincide con il suo centro, il luogo è costituito da una seconda circonferenza. Se infine P è esterno alla circonferenza k, si osserva che alcune rette per P sono secanti la k e quindi su ciascuna di esse esiste un punto medio delle corde. Altre rette per P non secano la k e quindi dal punto di vista elementare non danno luogo a corde della *k*; quindi su di esse non si può parlare di punti medi delle corde; le rette delle due specie sono separate dalle due tangenti mandate da *P* alla *k*. Il luogo cercato in questo caso risulta dato da un arco di circonferenza *k'*, che passa per i due punti di contatto delle due tangenti mandate a *k* dal punto P.

Orbene se si stabilisce nel piano della circonferenza *k* un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e si traduce il problema mediante le convenzioni della Geometria analitica, si trova che il luogo dei punti medi delle corde della *k* passanti per *P* è rappresentato in ogni caso dalla equazione di una circonferenza. Questa viene ad avere raggio nullo nel caso in cui *P* coincida con il centro della *k*; ma in ogni altro caso viene ad avere raggio diverso da zero, anche nel caso in cui *P* sia esterno alla *k*.

La spiegazione di questo apparente paradosso può essere data osservando che in ogni caso le intersezioni tra una retta per *P* e la circonferenza *k* vengono fornite da una equazione di secondo grado a coefficienti reali; che la ricerca del punto medio conduce ad una funzione simmetrica delle radici di questa equazione e che tale funzione simmetrica risulta in ogni caso reale, anche se le radici sono immaginario coniugate. Si vede quindi come, con la trattazione analitica e fondandosi sui metodi e le procedure dell'Algebra, il problema posto venga risolto in ogni caso in modo uniforme e generale, senza dar luogo a imbarazzanti discussioni e a faticose distinzioni.

La soluzione che il P. propone è quella di associare alla circonferenza *k*, nel caso in cui il punto *P* sia esterno, una curva del II ordine (sezione conica o brevemente "conica"), in modo che su ogni retta per *P* venga secata una corda, dalla circonferenza *k* nel caso in cui la retta è secante, dalla conica associata nel caso in cui la retta non sia una secante la *k*. Il P. giunge così ad assegnare in modo ben determinato ad ogni retta per *P* non secante la *k* una "corda ideale", e dimostra che la conoscenza delle "corde ideali" basta per poter eseguire le costruzioni che interessano la Geometria e che riguardano la *k* o sistemi di circonferenze o di curve del II ordine.

Occorre dire subito che nell'ambiente dei matematici contemporanei la enunciazione del "Principio di continuità" e le applicazioni che il P. ne voleva dare suscitarono perplessità e critiche. Alla luce degli sviluppi successivi della Matematica tali critiche appaiono molto giustificate. È da ricordarsi infatti che soltanto verso la fine del secolo XIX si giunse alla precisazione rigorosa del concetto di continuità. Quella continuità che il P. assume come nota è chiaramente quella che viene presa dalla esperienza fisica, relativa ai dati dei nostri sensi, cioè la continuità intesa come "cambiamento insensibile" di una figura, senza che vengano alterati i rapporti tra i componenti della figura stessa. Occorre inoltre ricordare il fatto che per il P. la espressione "curva geometrica" viene a significare quella che oggi si chiama "curva algebrica". Inoltre i matematici non avevano ancora eseguito quelle analisi sul concetto di funzione e di curva per le quali vanno famosi i nomi di Dirichlet e di Peano. Potremmo quindi dire che la ragione fondamentale che giustifica la riuscita dei procedimenti di P. è fornita dalle proprietà delle funzioni algebriche, cioè di quelle funzioni implicite di variabile complessa che sono definite da una equazione algebrica.

Nulla di strano quindi che la presentazione che P. fa della problematica e la risoluzione che egli dà dei problemi mediante quello che egli chiama principio di continuità riesca quasi sempre a raggiungere il suo scopo. Tuttavia egli stesso ricorda che per l'applicazione del suo principio occorre avere della precauzioni critiche le quali permettano di evitare gli inconvenienti del passaggio al limite eseguito senza precauzioni. Ad esempio per P. è senz’altro evidente che si può parlare della retta congiungente due punti coincidenti su una circonferenza e che tale retta è la tangente alla circonferenza stessa nel punto. Analogamente egli dichiara che quando una quadrica "si riduce ad un punto" non bisogna considerare questo punto come un punto geometrico puro, ma come una quadrica piccolissima, che mantiene la sua forma ed i suoi assi, ecc. Da questo e da molti altri passi si trae quindi che il suo passaggio al limite non è quello della Analisi matematica moderna, così come è concepito oggi, ma è una elaborazione fantastica della variazione insensibile delle figure, che conserva però a queste le loro proprietà fondamentali. Tali proprietà vengono conservate anche quando la figura degenera: per esempio alcune delle proprietà delle sezioni coniche sono possedute anche dalle coniche degeneri in una coppia di rette, che si può ottenere secando un cono con un piano che passi per il vertice.

Per il principio di continuità, dal P. questa conservazione di alcune tra le proprietà veniva vista come conseguenza del fatto che un piano secante il cono, muovendosi per continuità con "variazioni insensibili", può venire a passare per il vertice del cono stesso. Pertanto appaiono giustificate le osservazioni avanzate dal Cauchy, il quale scriveva che esso "*...non è che una forte induzione, mediante la quale certi teoremi, stabiliti originariamente in presenza di alcune restrizioni vengono estesi anche ai casi nei quali tali restrizioni sono assenti. Applicato alle curve di II ordine questo principio si è rivelato fecondo. Ma pensiamo che non possa essere applicato indiscriminatamente a tutti i problemi di Geometria e di Analisi. Accordandogli troppa confidenza si potrebbe cadere in errori talvolta manifesti*."

Pur facendo credito alle critiche di Cauchy, occorre tuttavia osservare che la enunciazione di un "principio" cosiffatto sta a testimoniare della mirabile capacità di fantasia del suo enunciatore e soprattutto della sua inventiva e della sua capacità di induzione. Inoltre il fatto che egli non cadesse in errori nella applicazione del suo "principio" sta ad indicare la profondità della sua intuizione e il suo "esprit de finesse". In questo egli dimostrò di essere di statura comparabile a quella dei geni, che hanno delle intuizioni superiori alla portata dei loro enunciati e sanno essi soli applicare i loro metodi con le debite precauzioni. Queste doti del P. rifulgono in maniera particolare nella costruzione della Geometria proiettiva.

Prendendo in considerazione la corrispondenza che nasce tra una figura piana e quella che se ne ottiene mediante proiezione da un centro, egli giunse a precisare un concetto fondamentale: il concetto di "invariante proiettivo" o anche, come egli dice, di "proprietà proiettiva". Se volessimo spiegare in modo assolutamente elementare questo concetto, potremmo dire che esso mette in evidenza il fatto che, quando si sottopongono le figure geometriche a certe trasformazioni, c'è qualche cosa che cambia nella figura e qualche cosa invece che rimane. Questa osservazione sarà sviluppata anche da F. Klein nella sua celebre dissertazione inaugurale del 1872 che viene anche ricordata dai matematici sotto il nome di "Programma di Erlangen". Ma L'idea di Poncelet che ci fosse qualche cosa che non varia nella figure trasformate risulta la idea direttiva della sua ricerca.

Pensiamo per esempio alla figura che è una circonferenza, ed alla figura (sezione conica) che si ottiene proiettando la circonferenza stessa da un centro sopra un piano che non sia parallelo al piano della circonferenza. Esistono delle proprietà della circonferenza che 'vanno perdute' e delle proprietà che vengono conservate dall'operazione di proiezione. Orbene queste ultime risultano essere propriamente quelle che formano oggetto della Geometria proiettiva che ha nel Poncelet uno dei suoi fondatori. Per esempio dalla definizione stessa delle circonferenza si trae immediatamente che tale curva non può essere intersecata da una retta del suo piano in più di due punti. La stessa proprietà vale ovviamente anche per ogni conica, in quanto proiezione della circonferenza. Tradotta mediante le convenzioni della Geometria analitica tale proprietà porta che la conica, così come la circonferenza, viene rappresentata da una equazione di II grado nelle coordinate cartesiane dei suoi punti.

Il P. si esprime dicendo che le proprietà di cui si tratta sono "proprietà di genere" e non "di specie"; la sua intuizione e la sua espressione saranno precisate in seguito alle ricerche di Klein e possono essere enunciate dicendo che il gruppo di trasformazioni (le proiezioni) che lasciano invariate queste proprietà è più vasto del gruppo di trasformazioni che lasciano invariate le proprietà studiate dalla Geometria elementare.

Il P. giunge ad affermare subito che tra le proprietà proiettive vi sono quelle di appartenenza, per esempio il fatto che un punto appartenga ad una retta risulta invariante; e questa osservazione lo porta immediatamente alla introduzione degli elementi all'infinito del piano (retta all'infinito) e dello spazio (piano all’infinito). Inoltre egli individua altre proprietà che sono basate sulla misura dei segmenti ma che sono invarianti. Tra queste egli indica il numero che viene oggi chiamato "birapporto" di quattro punti su una retta (rapporto anarmonico) ed altri invarianti costruiti con punti e rette del piano e dello spazio.

Di questa sua visione egli si serve per dare una portata molto più generale a certe proprietà delle figure, dimostrate con un metodo che attiene alla Geometria elementare ma enunciate nello spirito della Geometria proiettiva. Per esempio servendosi della operazione di proiezione egli riesce a dimostrare le proprietà dei gruppi armonici della figura che oggi si chiama quadrangolo piano completo, basandosi soltanto sulla proprietà dei parallelogrammi di avere le diagonali che si dimezzano scambievolmente.

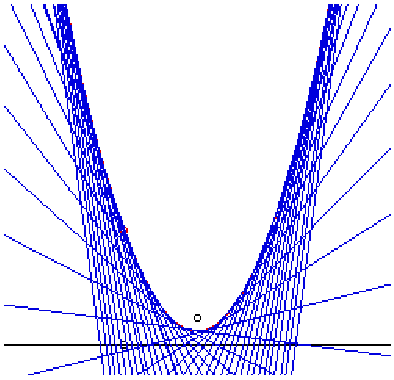
Analogamente egli ricava proprietà delle coniche deducendole da quelle della circonferenza, ed osservando che è sempre possibile proiettare una conica ed una sua "corda ideale" in una circonferenza e nella retta all'infinito del suo piano. Coerentemente alla sua visione egli è indotto a costruire il completamento dello spazio geometrico mediante gli elementi all’infinito.

La sua capacità di interessarsi anche di problemi concreti lo portò anche a meditare sugli strumenti per risolvere i problemi geometrici, dimostrando che tutte le costruzioni che si possono eseguire con la riga ed il compasso (usati nel modo abituale) possono anche essere eseguite con la riga soltanto quando sia dato nel piano una circonferenza di cui è assegnato il centro. Analogamente egli dimostra che per gli stessi scopi possono servire anche la riga e quella che egli chiama la "falsa squadra", cioè un angolo qualsivoglia realizzato in materiale tale che si possa trasportare rigidamente.

Portato dalla trattazione delle proprietà proiettive delle figure, egli mise a punto anche l'analisi della corrispondenza tra piani sovrapposti che chiamò (e si chiama ancora) *omologia*, mettendone in luce le proprietà ed utilizzandola per le costruzione geometriche, comprese quelle estremamente ingegnose che riguardano tangenze ed osculazioni tra rami di curve e coniche.

Infine la sua ricerca di invarianti lo portò a determinare le proprietà invarianti proiettive dei gruppi di punti che sono secati su una retta trasversale, passante per un punto, da una curva algebrica di un dato ordine. Proprietà che sono fondamentali per le curve polari, dei vari ordini, del punto rispetto alla curva. In particolare egli studiò la corrispondenza che si instaura tra punti e rette di un medesimo piano, quando si fissi nel piano stesso una conica qualunque e si associ ad ogni punto la retta sua polare rispetto alla conica. Questa corrispondenza, come è noto, realizza geometricamente la corrispondenza che viene chiamata "dualità" tra figure piane.

Egli osserva esplicitamente che questa corrispondenza muta una figura formata da punti e rette in un’altra costituita da rette e punti, con la conservazione delle proprietà proiettive delle due. Viene così estesa la validità delle nuove proposizioni di Geometria che rientrino nella classe di quelle da lui considerate. Egli tratta poi la corrispondenza tra due curve algebriche che si corrispondano nella polarità: l'una costituita da punti e l'altra inviluppata dalle rette corrispondenti ai punti stessi nella polarità. Egli osserva esplicitamente anche che dall'inviluppo aderente ad una curva algebrica, costituito quindi dalle sue tangenti, devono essere tolte le rette appartenenti ai fasci aventi i centri nei punti doppi della curva stessa, e che ad un flesso dell'una delle curve corrisponde una cuspide dell'altra. Egli pone così le basi per lo studio delle curve algebriche nell'ambito proiettivo che doveva essere portato avanti dalle generazioni successive di matematici.



NdR

(*) Si può vedere in rete la voce
CONTINUITÀ. Enciclopedia Italiana (1931) , di F. En. - O. Ch.

Appunti reimpaginati febbraio 2014